ANALYSE NUMÉRIQUE

Les parties I et II (sauf question 6) sont indépendantes.

On désigne par Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 1$, et par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω. Si f appartient à $C(\Omega)$, on appelle support de f l'ensemble :

$$\text{supp}f = \text{ adhérence de } \{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}.$$

On note :

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); \text{supp}f \text{ est un compact inclus dans } \Omega\}$$
$$= \{f \in C(\Omega);\ \exists\ K \subset \Omega\ ,\ K \text{ compact tel que } f(x) = 0\ ,\ \forall x \in \Omega - K\}$$

$$C_c^1(\Omega) = C^1(\Omega) \cap C_c(\Omega)\ \ ;\ \ C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$C(\overline{\Omega}) = \{$ prolongements par continuité à $\overline{\Omega}$ de fonctions uniformément continues sur Ω $\}$.

On désigne par $L^1(\Omega), L^2(\Omega), ..., L^p(\Omega)$ respectivement les espaces de Banach de classes de fonctions intégrables, de carré sommable, de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable, sur l'ouvert Ω muni de la mesure de Lebesgue. On rappelle qu'un espace métrique est dit séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense. On admettra que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, et que $L^p(\Omega)$ est séparable, pour $1 \leq p < \infty$.

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

Partie I. On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ par :

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i = 1, 2, ..., N\right\}.$$

1) Montrer que, si u $\in H^1(\Omega)$, les fonctions g_i $(1 \leq i \leq N)$ sont définies de manière unique.

On note alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i\ ,\ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\ ,$$

et on munit $H^1(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|g_i\|^2_{L^2(\Omega)}\ ,$$

déduite du produit scalaire :

$$((u, v)) = \int_\Omega \left[uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] = \int_\Omega [uv + \nabla u\ .\ \nabla v\ ].$$

Montrer que, si $u \in C_c^1(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle usuelle au sens des fonctions, et que $C_c^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

Montrer que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire.

On définit :

$$H_0^1(\Omega) = \text{ adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans l'espace } H^1(\Omega)\ .$$

Vérifier que c'est un espace de Hilbert (pour le même produit scalaire et la même norme).

2) On veut montrer que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable .

Soit L l'opérateur défini de la façon suivante : à $u \in H^1(\Omega)$, on associe $\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right) \in (L^2(\Omega))^{N+1}$.

Montrer que $L(H^1(\Omega))$ est un sous-espace fermé de $(L^2(\Omega))^{N+1}$.

Montrer qu'un produit fini d'espaces séparables est séparable, et qu'un sous-espace d'un espace séparable est séparable (on pourra construire un sous-ensemble dénombrable dense de ce sous-espace à l'aide d'une suite dense de l'espace et d'une suite de réels tendant vers zéro).

En déduire que $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert séparables.

3) Soit f $\in L^2(\Omega)$. Montrer que l'application qui à v $\in H^1(\Omega)$ (respectivement $H_0^1(\Omega)$) associe $L(v) = \int_\Omega fv$, est linéaire continue.

En déduire qu'il existe un et un seul $u \in H^1(\Omega)$ (respectivement $H_0^1(\Omega)$) tel que :

$$((u, v)) = \int_\Omega fv, \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega) \text{(respectivement } H_0^1(\Omega)); \text{ et que } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On définit ainsi un opérateur linéaire continu, noté T, de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (respectivement $H_0^1(\Omega)$) par : $u = T(f)$.

4) On désigne par V l'espace $H^1(\Omega)$ (respectivement $H_0^1(\Omega)$). Soit V_h un sous-espace de dimension finie de V, dépendant d'un paramètre $h > 0$ destiné à tendre vers zéro, dont la dimension est notée $N(h)$. Montrer qu'il existe un et un seul $u_h \in V_h$ tel que :

$$\int_\Omega [\ \nabla u_h \ . \ \nabla v_h \ + \ u_h \ v_h \ ] \ = \ \int_\Omega f \ v_h \ , \forall \ v_h \in V_h \ \ ; \text{et que } \|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On définit ainsi un opérateur linéaire continu, noté T_h, de $L^2(\Omega)$ dans V_h, par : $u_h = T_h(f)$. Soit u la solution obtenue à la question 3); montrer que : $\|u - u_h\|_V \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$.

On suppose qu'il existe un sous-espace dense $\mathcal{V}$ de V, et une application r_h de $\mathcal{V}$ dans V_h telle que $r_h v \longrightarrow v$ dans V quand $h \longrightarrow 0$. Montrer que $\|u - u_h\|_V \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$.

5) Méthode de Galerkin-*(cette question n'est pas indispensable pour la suite*):

On appelle base Hilbertienne d'un espace de Hilbert V une suite (w_j) telle que les w_j soient orthonormés et telle que l'espace vectoriel engendré par les éléments de la suite soit dense dans V. Montrer que si V est un espace de Hilbert séparable, alors il admet une base Hilbertienne (construire une telle base (w_j) à partir d'une suite dense (v_j)). Soit V_m l'espace vectoriel engendré par $w_1, w_2, ..., w_m$. Soit u_m la solution obtenue à la question 4) (pour $V_h = V_m$ et $h = \frac{1}{m}$). En prenant $\mathcal{V} = V$ et pour r_h la projection orthogonale de V sur V_m, vérifier que $u_m \longrightarrow u$ dans V quand $m \longrightarrow \infty$, où u est la solution obtenue à la question 3) .

6) Dans toute la suite de cette partie I on suppose que

$$N = 1 \ , \text{ et que } \Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}.$$

Soit u la solution obtenue à la question 3). Montrer que :

$$\frac{du}{dx} \in H^1(\Omega), \text{ avec } \frac{d}{dx}(\frac{du}{dx}) = u - f \ , \text{ et } \left|\frac{d}{dx}(\frac{du}{dx})\right|_{L^2} \leq 2|f|_{L^2}.$$

Dans toute la suite, la quantité $\frac{du}{dx}$ définie au paragraphe 1) si $u \in H^1(]0,1[)$ sera notée u', avec $u'' = (u')'$.

7) On va montrer que si $u \in H^1(]0,1[)$, alors il existe un représentant $\tilde{u}$ de la classe de fonctions à laquelle appartient u, tel que $\tilde{u} \in C([0,1])$, $u = \tilde{u}$ p.p. sur $]0,1[$, et tel que :

$$\forall \ x \text{ et } y \ \in]0,1[\ , \ \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) \ dt \ .$$

En choisissant le représentant continu de la classe, on notera $u = \tilde{u}$.

a) Soit ψ une fonction de $\mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $\int_0^1 \psi \ = \ 1$. Montrer que, pour tout w de $\mathcal{D}(]0,1[)$, il existe ϕ appartenant à $\mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $\phi' \ = \ w - (\int_0^1 w) \ \psi$. Soit $p \in L^2(]0,1[)$ telle que $\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, $\int_0^1 p \ \phi' \ = \ 0$. En utilisant le fait que $\mathcal{D}(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, déduire de ce qui précède que $p \ - \ \int_0^1 (p \ \psi) = 0$ p.p. sur $]0,1[$, donc que p est constante p.p. sur $]0,1[$.

b) Soit $g \in L^2(]0,1[)$ et $y_0 \in]0,1[$. On pose, pour $x \in \ ]0,1[$, $v(x) = \int_{y_0}^x g(t) \ dt$. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, montrer, en remplaçant $]0,1[$ par $]0,y_0[\cup]y_0,1[$ et en appliquant le théorème de Fubini sur chaque sous-intervalle, que l'intégrale $\int_0^1 v \ \phi'$ est égale à $\ - \int_0^1 g \ \phi$.

c) Soit $u \in H^1(]0,1[)$; soit $y_0 \in]0,1[$ et soit $\tilde{u}(x) = \int_{y_0}^x u', \ x \in]0,1[$. En utilisant a) et b), montrer qu'il existe une constante C telle que $u - \tilde{u} = C$ p.p. sur $]0,1[$. En déduire qu'il existe $\tilde{u}$ satisfaisant aux propriétés énoncées au début de cette question 7).

8) Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$.

a) Montrer, tout d'abord pour des fonctions de $\mathcal{D}(]0,1[)$, puis, par densité de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$, pour des éléments de $H_0^1(]0,1[)$, que l'on a l'inégalité suivante :

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[), \ |u(x)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)} \ , \text{p.p. } x \in]0,1[\ .$$

Pour cela, on rappelle que de toute suite convergente dans L^2 on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.

En déduire, en utilisant la question 7 (en identifiant u à $\tilde{u}$), que l'injection de $H_0^1(]0,1[)$ dans $C([0,1])$ est continue , et que l'on a l'inégalité :

$$\|u\|_{C([0,1])} \ = \ \sup_{x \in [0,1]} |u(x)| \ \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)} \ , \forall u \in H_0^1(]0,1[).$$

Montrer, en utilisant la densité de fonctions de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$, que $u(0) = u(1) = 0$ si $u \in H_0^1(]0,1[)$. Dans la suite du problème, on admettra que :

$$H_0^1(]0,1[) = \{u \in H^1(]0,1[) \text{ tels que } u(0) = u(1) = 0 \ \}.$$

b) (Cette question n'est pas indispensable pour la suite): En utilisant le résultat de 8) a) , la question 7), et le théorème d'Ascoli (rappel : si $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble borné de $C([0,1])$ tel que l'on ait : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, $\forall f \in \mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $C([0,1])$), montrer que l'injection de $H_0^1(]0,1[)$ dans $C([0,1])$ est compacte (c'est à dire que l'image d'un borné de H_0^1 est relativement compacte dans $C([0,1])$).

9) Sur l'intervalle $[0,1]$, pour M entier et $h = \frac{1}{M}$, on définit les points $a_i = i\,h$, $0 \leq i \leq M$. Pour $1 \leq i \leq M-1$, on définit les fonctions ϕ_i par :

$$\phi_i(x) = \frac{-x + a_{i+1}}{h} \text{ sur } [a_i, a_{i+1}] \ , \ \frac{-a_{i-1} + x}{h} \text{ sur } [a_{i-1}, a_i] \ , \ 0 \text{ ailleurs} .$$

Montrer que ϕ_i appartient à $H^1(]0,1[)$, et que $\phi_i'(x)$ vaut: $\frac{-1}{h}$ sur $]a_i, a_{i+1}[$, $\frac{1}{h}$ sur $]a_{i-1}, a_i[$, 0 ailleurs, puis que $\phi_i \in H_0^1(]0,1[)$ pour $1 \leq i \leq M-1$.

Soit V_h l'espace vectoriel de dimension $M-1$ engendré par les ϕ_i, $1 \leq i \leq M-1$. Soit Π_h l'opérateur de $H_0^1(]0,1[)$ dans V_h défini par :

$$\Pi_h u(x) = \sum_{i=1}^{M-1} u(a_i)\ \phi_i(x) .$$

Montrer, en posant $\phi_0 = \phi_M = 0$, que l'égalité suivante est vraie:

$$\|u - \Pi_h u\|^2_{H^1(]0,1[)} = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[|u - u(a_i)\phi_i - u(a_{i+1})\phi_{i+1}|^2 + \left| u' + \frac{u(a_i)}{h} - \frac{u(a_{i+1})}{h} \right|^2 \right] dx.$$

10) Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que $u' \in H^1(]0,1[)$; en utilisant le résultat de la question 7) pour u, puis pour u', montrer que :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| u'(x) + \frac{u(a_i)}{h} - \frac{u(a_{i+1})}{h} \right|^2 dx \ \leq \ h^2 \int_{a_i}^{a_{i+1}} |u''(t)|^2\, dt .$$

En introduisant $w = u - u(a_i)\phi_i - u(a_{i+1})\phi_{i+1}$, montrer que $w \in H^1(]0,1[)$ et que $w' = u' + \frac{u(a_i)}{h} - \frac{u(a_{i+1})}{h}$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |w(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{2} h^4 \int_{a_i}^{a_{i+1}} |u''(t)|^2\, dt .$$

En déduire que , si $h < 1$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(]0,1[)} \leq h^2 \|u''\|_{L^2(]0,1[)} \ , \ \|u - \Pi_h u\|_{H^1(]0,1[)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(]0,1[)} \ \ (C > 0);$$

puis, à l'aide des questions 3), 4), 6), que $\|T - T_h\|_{\mathcal{L}(L^2(]0,1[);H_0^1(]0,1[))} \leq Ch$ $(C > 0)$, où T et T_h sont les opérateurs introduits en 3) et 4).

Partie II. Soient V et W deux espaces de Banach sur $\mathbb{R}$, Λ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $G : V \longrightarrow W$ une application de classe C^1 et $T \in \mathcal{L}(W, V)$. On définit F, de $\mathbb{R} \times V$ dans V par:

$$F(\lambda, u) = (Id \ + \ \lambda\, T\, G\ )(u). \tag{1}$$

Les dérivées partielles de F par rapport à λ et à u au point (λ, u) sont notées $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)$ et $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, u)$.

On suppose qu'il existe une branche $(\lambda, u(\lambda))$ de solutions non singulières de $F(\lambda, u) = 0$, qui vérifie les propriétés suivantes:

$$\text{l'application } \lambda \longrightarrow u(\lambda) \text{ est continue de } \Lambda \text{ dans } V, \tag{2}$$

$$\forall \lambda \in \Lambda, \ F(\lambda, u(\lambda)) = 0 , \tag{3}$$

$$\forall \lambda \in \Lambda, \ \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u(\lambda)) \text{ est un isomorphisme de } V \text{ dans } V. \tag{4}$$

Soit h un réel positif; à tout h on associe un sous-espace de dimension finie V_h de V, muni de la norme de V. Soit T_h un opérateur (approximation de l'opérateur T) linéaire continu de W dans V_h. On définit F_h de $\mathbb{R} \times V_h$ dans V_h, par l'égalité :

$$F_h(\lambda, u_h) = (Id \ + \ \lambda\, T_h\, G)\ (u_h) . \tag{5}$$

On va démontrer l'existence d'une branche $(\lambda, u_h(\lambda))$ dans $\Lambda \times V_h$ de solutions de $F_h(\lambda, u_h(\lambda)) = 0$, et obtenir une majoration uniforme de l'erreur $\|u(\lambda) - u_h(\lambda)\|$. On suppose qu'il existe une application Π_h linéaire continue de V dans V_h telle que :

$$\exists C > 0;\ \forall \lambda, \lambda^* \in \Lambda \ , \ \forall h > 0, \ \ \|\Pi_h u(\lambda^*) - \Pi_h u(\lambda)\|_V \leq \ C\ |\lambda - \lambda^*| \ , \tag{6}$$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\lambda \in \Lambda} \|u(\lambda) - \Pi_h u(\lambda)\|_V = 0 . \tag{7}$$

On suppose enfin que G et sa différentielle DG sont Lipschitziennes sur les bornés de V, c'est-à-dire :

$$\|G(u) - G(u^*)\|_{W'} \leq L_1(\|u\|, \|u^*\|)\ \|u - u^*\|_V, \tag{8}$$

$$\|DG(u) - DG(u^*)\|_{\mathcal{L}(V,W')} \leq L_2(\|u\|, \|u^*\|)\ \|u - u^*\|_V, \tag{9}$$

où L_1 et L_2 sont deux applications de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ croissantes par rapport à chaque variable. On suppose que l'approximation T_h de T vérifie les relations suivantes (la dernière se déduisant des autres hypothèses):

$$\lim_{h\to 0} \|T - T_h\|_{\mathcal{L}(W,V)} = 0, \tag{10}$$

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\lambda\in\Lambda} \|F_h(\lambda, \Pi_h u(\lambda))\|_V = 0\ . \tag{11}$$

1) Pour cette question 1), F_h défini en (5) est aussi considéré comme un opérateur de $\mathbb{R} \times V$ dans V. Ecrire les expressions de $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)$ et $\dfrac{\partial F_h}{\partial u_h}(\lambda, u_h)$. Montrer, à l'aide des hypothèses de continuité et de (4), qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, $\forall \lambda \in \Lambda$, $\left\|\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u(\lambda))\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \alpha$. Montrer que si $A \in \mathrm{Isom}(V,V)$, avec $\|A^{-1}\| \leq \alpha$, alors, $\forall v \in V, \|Av\|_V \geq \dfrac{1}{\alpha}\|v\|_V$; en déduire que $\forall w \in V, \forall \lambda \in \Lambda, \left\|\dfrac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u(\lambda))\ w\right\|_V \geq \dfrac{1}{\alpha}\|w\|_V$. En faisant la différence des expressions $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u(\lambda))$ et $\dfrac{\partial F_h}{\partial u_h}(\lambda, \Pi_h u(\lambda))$ dans $\mathcal{L}(V,V)$ et en utilisant (2), (7), (9), (10), montrer que l'on a : $\forall w_h \in V_h$, $\left\|\dfrac{\partial F_h}{\partial u_h}(\lambda, \Pi_h u(\lambda))\ w_h\right\|_V \geq (\alpha^{-1} - \varepsilon(h))\ \|w_h\|_V$, où $\varepsilon(h)$ est une fonction indépendante de $\lambda \in \Lambda$, qui tend vers 0 quand $h \to 0$. En déduire qu'il existe $h_0 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que : $\forall h < h_0$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $\left\|\left(\dfrac{\partial F_h}{\partial u_h}(\lambda, \Pi_h u(\lambda))\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_h,V_h)} \leq C$.

2) Montrer, avec (2), (7), (8) et (10) qu'il existe des constantes $C > 0$ et $h_1 > 0$ telles que l'on ait:

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall h < h_1\ , \left\|\frac{\partial F_h}{\partial \lambda}(\lambda, \Pi_h u(\lambda))\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},V_h)} \leq C.$$

3) En utilisant (2),(7),(8),(9),(10), montrer qu'il existe $h_2 > 0$, et une fonction L de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante par rapport à chaque variable, telle que , $\forall \lambda \in \Lambda$ et $\forall \lambda^* \in \mathbb{R}$, $\forall u_h^* \in V_h$, et $\forall h < h_2$:

$$\begin{aligned}&\|DF_h(\lambda^*, u_h^*) - DF_h(\lambda, \Pi_h u(\lambda))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}\times V_h; V_h)}\\ &\qquad \leq L(|\lambda^*| + \|u_h^*\|_V, |\lambda| + \|\Pi_h u(\lambda)\|_V)\ (|\lambda - \lambda^*| + \|u_h^* - \Pi_h u(\lambda)\|_V).\end{aligned}$$

Pour ceci, on notera $DF_h(a,b)$ la différentielle de F_h au point (a,b), que l'on exprimera à l'aide des dérivées partielles; on rappelle que V_h est muni de la norme de V. En déduire qu'il existe une fonction croissante $\dot{L}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall \lambda \in \Lambda$ et $\forall \lambda^* \in \mathbb{R}$, $\forall u_h^* \in V_h$ avec $\|u_h^* - \Pi_h u(\lambda)\|_V + |\lambda^* - \lambda| < \xi$, la quantité $L(.,.)$ dans l'expression précédente peut être majorée par $\dot{L}(\xi)$ (utiliser à nouveau (2) et (7)).

4) En utilisant (2), (3), (7), (8), (10), montrer qu'il existe $h_3 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$\forall h < h_3,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \|F_h(\lambda, \Pi_h u(\lambda))\|_V \leq C\ [\|\Pi_h u(\lambda) - u(\lambda)\|_V + \|(T_h - T)\ G\ u(\lambda)\|_V]\ .$$

5) On admettra le résultat suivant (généralisation du théorème des fonctions implicites):

Soient X, Y, Z des espaces de Banach et U un sous-ensemble de X. Soit y une fonction définie sur U et à valeurs dans Y, telle que: $\forall x,\ x^* \in U, \|y(x) - y(x^*)\| \leq C_0\|x - x^*\|$ $(C_0 > 0)$. Soit f une application de classe C^1 de $X \times Y$ dans Z , telle que:

$$\forall x_0 \in U,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y(x_0)) \in \mathrm{Isom}(Y,Z),\ \sup_{x_0\in U} \|((\frac{\partial f}{\partial y})(x_0, y(x_0)))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z,Y)} \leq C_1\ \ (C_1 > 0), \tag{12}$$

$$\sup_{x_0\in U} \|(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0, y(x_0))\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq C_2\ \ (C_2 > 0)\ , \tag{13}$$

et telle qu'il existe une fonction croissante $\dot{L}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant l'inégalité suivante :

$\forall x_0 \in U$ et $\forall x \in X, \forall t \in Y$ tels que $\|x - x_0\|_X + \|t - y(x_0)\|_Y \leq \xi$,

$$\|Df(x,t) - Df(x_0, y(x_0))\|_{\mathcal{L}(X\times Y,Z)} \leq \dot{L}(\xi)(\|x - x_0\|_X + \|t - y(x_0)\|_Y). \tag{14}$$

Alors, il existe une constante $d > 0$, dépendant de $\dot{L}, C_0, C_1, C_2$ telle que, si

$$\sup_{x_0\in U} \|f(x_0, y(x_0))\|_Z \leq d, \tag{15}$$

il existe une seule fonction g, de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur un voisinage de U et à valeurs dans Y telle que $\forall x \in U, f(x, g(x)) = 0$. De plus, il existe une constante $K > 0$ telle que, $\forall x_0 \in U$:

$$\|g(x_0) - y(x_0)\|_Y \leq K \, \|f(x_0, y(x_0))\|_Z \, .$$

Pour chaque $h < \inf(h_0, h_1, h_2, h_3)$, on va appliquer ce théorème à $f = F_h$.

En utilisant les résultats des questions antérieures, et (2), (7), (10) pour que $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|F_h(\lambda, \Pi_h u(\lambda))\|_V$ tende vers zéro quand h tend vers zéro, montrer qu'il existe une constante $h_4 > 0$, une constante $C > 0$, et une unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $u_h : \lambda \in \Lambda \to u_h(\lambda) \in V_h$ telle que pour tout $h < h_4$ et tout $\lambda \in \Lambda$, on ait:

$$F_h(\lambda, u_h(\lambda)) = 0 \; ; \; \|u_h(\lambda) - u(\lambda)\|_V \leq C\big(\|\Pi_h u(\lambda) - u(\lambda)\|_V + \|(T_h - T)\, Gu(\lambda)\|_V\big).$$

6) Application au problème de la partie I: Soit $V = H_0^1(]0,1[)$, l'espace V_h et l'opérateur Π_h sont ceux introduits à la question 9) de la partie I. T est l'opérateur de $L^2(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$ introduit à la question 3). T_h est l'opérateur introduit à la question 4), et G l'application définie par $G(u) = u^3$. Montrer que G est une application de $H_0^1(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$ (utiliser les questions 7) et 8)). Montrer que l'on peut appliquer les résultats de la partie II au problème :

$$F(\lambda, u) = u + \lambda \, T \, G(u) \, .$$

Pour cela, en faisant les hypothèses (2), (3), (4), (6), (7), vérifier que les autres hypothèses sont satisfaites et appliquer les résultats de la question précédente. Montrer que l'on a $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|u_h(\lambda) - u(\lambda)\|_{H_0^1(]0,1[)} \leq C\, h$.

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

I

Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^m$, on désigne par $\langle x\,,y\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$ le produit scalaire usuel et $\|x\| = \sqrt{\langle x\,,x\rangle}$ la norme associée.

La sphère $\mathbf{S}^{m-1}$ est l'ensemble $\mathbf{S}^{m-1} = \big\{x \in \mathbf{R}^m \;\big|\; \|x\| = 1\big\}$.

On note $(x,y) = (x_1, \ldots, x_m\,; y_1, \ldots, y_m)$ un système de coordonnées sur $\mathbf{R}^{2m}$. Soit $\mathcal{C}^\infty\big(\mathbf{R}^{2m}\big)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(U)\big)$ l'algèbre des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^{2m}$ (resp. sur un ouvert U de $\mathbf{R}^{2m}$) à valeurs réelles.

On note $\quad \lambda F + \mu F' : (x,y) \longmapsto \lambda F(x,y) + \mu F'(x,y)$

et $\quad F \cdot G : (x,y) \longmapsto F(x,y) \cdot G(x,y).$

Pour $F, G \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbf{R}^{2m}\big)$, on définit le crochet de Poisson canonique $\{F,G\}$ comme la fonction :

$$\{F,G\}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \left(-\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial y_i} \right)(x,y).$$

1) Soit $H \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbf{R}^{2m}\big)$. On considère le système différentiel (de Hamilton)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ & \qquad\qquad i = 1, \ldots, m \qquad (1) \\ \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}$$

et on admet qu'il existe pour toute donnée initiale $\big(x_0, y_0\big) \in \mathbf{R}^{2m}$ une unique solution locale $\big(x(t), y(t)\big)$ du système (1) telle que $\big(x(0), y(0)\big) = \big(x_0, y_0\big)$ (théorème de Cauchy). On appelle flot du système (1) à l'instant t le difféomorphisme local $\Phi_t : \big(x_0, y_0\big) \longmapsto \big(x(t), y(t)\big)$.

Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\big(x(t),y(t)\big)$ à l'aide du crochet de Poisson $\{F,H\}$.

2) On définit X_H le champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction H par l'application

$$\begin{aligned} X_H : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m}) \\ F &\longmapsto X_H \cdot F = \{F,H\} \end{aligned}$$

Vérifier que :

$$\begin{aligned} X_H \cdot (\lambda F + \mu F') &= \lambda X_H \cdot F + \mu X_H \cdot F' \\ X_H \cdot (F.G) &= (X_H \cdot F).G + F.(X_H \cdot G). \end{aligned}$$

3) On dit que F est une intégrale première de X_H si $X_H \cdot F = 0$.
Vérifier que F est une intégrale première de X_H si et seulement si H est une intégrale première de X_F.

4) Soit A une matrice $m \times m$ symétrique réelle et $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$ défini par

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\langle Ax\,,x\rangle + \frac{1}{2}\Big(\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x\,,y\rangle^2\Big).$$

Montrer que X_H admet la fonction $F : (x,y) \longmapsto F(x,y) = \dfrac{1}{2}\Big(\|x\|^2 - 1\Big)$ comme intégrale première.

5) Soit $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$, $G : (x,y) \longmapsto G(x,y) = \langle x\,,y\rangle$.
On introduit le sous ensemble $T\mathbf{S}^{m-1} \subset \mathbf{R}^{2m}$ défini par

$$T\mathbf{S}^{m-1} = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^{2m} \;\big|\; F(x,y) = 0,\, G(x,y) = 0\big\}.$$

(i) Montrer qu'en tout point (x,y) de $T\mathbf{S}^{m-1}$ la fonction $\{F,G\}$ vaut 1.

(ii) Montrer qu'il existe une fonction $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$ telle que $H^* = H - \lambda F$ satisfait $\{H^*,G\} = 0$ en tout point de $T\mathbf{S}^{m-1}$.

(iii) On note $\big(x(t),y(t)\big)$ la solution du système de Hamilton définie par H^* pour la donnée initiale (x_0,y_0). Montrer que si $(x_0,y_0) \in T\mathbf{S}^{m-1}$, alors $\big(x(t),y(t)\big) \in T\mathbf{S}^{m-1}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

6) Montrer que le système différentiel (de Hamilton)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H^*}{\partial y}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$$

restreint à $T\mathbf{S}^{m-1}$ définit le mouvement d'un point soumis à une force linéaire en x ($\ddot{x} = -Ax$) et à une force de contrainte qui l'oblige à rester sur la sphère $\mathbf{S}^{m-1}$ (système de C. Neumann).

II

Soit A une matrice $m \times m$ symétrique réelle définie positive.
Soient $F,G,H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} H &: (x,y) \longmapsto H(x,y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 \\ F &: (x,y) \longmapsto F(x,y) = \langle A^{-1}x\,,x\rangle - 1 \\ G &: (x,y) \longmapsto G(x,y) = \langle A^{-1}x\,,y\rangle. \end{aligned}$$

1) Trouver deux fonctions $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^m)$ telles que
$X^* = X_H - \lambda_1 X_F - \lambda_2 X_G$ satisfasse

$$X^* \cdot F = X_H \cdot F - \lambda_1 X_F \cdot F - \lambda_2 X_G \cdot F = 0$$

$$X^* \cdot G = X_H \cdot G - \lambda_1 X_F \cdot G - \lambda_2 X_G \cdot G = 0.$$

2) On considère le système hamiltonien défini sur $\mathbf{R}^m \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^m$ par

$$H^* = H - \lambda_1 F - \lambda_2 G.$$

Soit TE l'ensemble défini par :

$$TE = \{(x,y) \in \mathbf{R}^{2m} \mid F(x,y) = G(x,y) = 0\}.$$

(i) Montrer que sur TE,

$$\{F, H^*\} = X^* \cdot F \quad \text{et} \quad \{G, H^*\} = X^* \cdot G.$$

(ii) Montrer que le flot de X_{H^*} laisse globalement invariant l'ensemble TE.

(iii) Montrer que le système différentiel (de Hamilton) défini par H^* restreint à TE donne les équations (flot géodésique sur l'ellipsoïde)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \nu A^{-1} x, \quad \nu = \frac{-1}{\|A^{-1}x\|^2} \langle A^{-1} y, y \rangle. \tag{2}$$

3) Quelles sont les positions d'équilibre de H^* restreint à TE ?

4) On considère le cas particulier $A = I$ (flot géodésique sur la sphère). Montrer que toutes les orbites du système différentiel (de Hamilton) de H^* restreint à $T\mathbf{S}^{m-1}$ sont soit des positions d'équilibre soit des orbites périodiques. Décrire géométriquement dans ce cas l'orbite de (2) qui correspond à une donnée initiale

$$x(0) \in \mathbf{S}^{m-1}, \; y(0) \neq 0, \; \langle x(0), y(0) \rangle = 0.$$

III

Étant donnés deux vecteurs $x, y \in \mathbf{R}^m$, on note $x \otimes y$ la matrice carrée d'ordre m d'élément général $(x \otimes y)_{i,j} = x_i y_j$ ($i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne).
Soit A une matrice $m \times m$ symétrique réelle. On note

$$L = L(x,y) = A + ax \otimes x + bx \otimes y + cy \otimes x + dy \otimes y,$$

où $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$. I désigne la matrice identité $m \times m$.

1) Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $\det(zI - A) \neq 0$. On note $C_j(z)$ le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice $zI - A$ et $B(z)$ la matrice des cofacteurs de ${}^{\mathrm{t}}(zI - A)$.

(i) Montrer que le déterminant de la matrice obtenue à partir de $zI - A$ en remplaçant le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne par x vaut $\sum_{i=1}^{m} x_i B_{ji}(z)$.

(ii) On pose $Q_z(u,v) = \langle (zI - A)^{-1} u, v \rangle$. Démontrer que :

$$\frac{\det(zI - L)}{\det(zI - A)} = 1 - \Phi_z(x,y), \text{ où}$$

$$\Phi_z(x,y) = aQ_z(x,x) + (b+c)Q_z(x,y) + dQ_z(y,y) - (ad - bc)\big(Q_z(x,x)Q_z(y,y) - Q_z^2(x,y)\big).$$

On considère maintenant le cas particulier où A est diagonale, $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, avec $\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$.

2) Montrer que Φ_z est une fraction rationnelle en z dont l'ensemble des pôles est contenu dans l'ensemble $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.
Soient $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ des constantes arbitraires ; on note $\beta = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ la matrice carrée $m \times m$ dont les éléments diagonaux sont les β_i $(i = 1, \ldots, m)$.
Soit f le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $f(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.
Soit $R > \max_{i=1,\ldots,m} |\alpha_i|$.
On désigne par $H_\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$ la fonction définie par :

$$H_\beta(x,y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \int_{\|z\|=R} f(z)\, \Phi_z(x,y)\mathrm{d}z$$

(intégration le long du cercle $\|z\| = R$ orienté dans le sens positif).

Montrer que H_β est la somme d'une forme quadratique T en (x,y) et d'un polynôme homogène $-(ad-bc)N$ de degré 4 en (x,y) (T et N dépendent de β. On ne fait pas apparaître β dans la notation pour simplifier).

3) On considère $L(t) = L\big(x(t), y(t)\big)$, où $\big(x(t), y(t)\big)$ désigne la solution du système différentiel (de Hamilton) associé à H_β (β est fixé) avec une donnée initiale (x_0, y_0) quelconque.

Le but de cette partie est d'exprimer sous une certaine forme la matrice $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$. Il est plus commode de noter dans cette partie

$$s = \frac{1}{2}(b+c),\ r = \frac{1}{2}(b-c),$$
$$S = ax \otimes x + s(x \otimes y + y \otimes x) + dy \otimes y,\ R = r(x \otimes y - y \otimes x).$$

On a donc $L = A + S + R$.
On note enfin Γ la matrice d'élément général $\Gamma_{i,j} = \dfrac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_i - a_j}(x_i y_j - y_i x_j)$.

Montrer que le système différentiel (de Hamilton) associé à H_β s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & d \\ -a & -s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} \Gamma x \\ \Gamma y \end{pmatrix}$$

où $\Delta = ad - bc$.

Soit $M(x,y)$ une matrice $m \times m$ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$, et $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2m})$. On note $\big(x(u), y(u)\big)$ la solution du système différentiel (de Hamilton) associé à Φ avec la donnée initiale (x_0, y_0).
On note $X_\Phi \cdot M\big(x(u), y(u)\big) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} M\big(x(u), y(u)\big)$.
On note $[A, B] = AB - BA$ le crochet de deux matrices A, B carrées d'ordre m.

4) (i) Montrer que $X_N \cdot R = -[\Gamma, R]$.

(ii) Montrer que $X_N \cdot S = -[\Gamma, S]$.

(iii) En déduire que $X_N \cdot L = -[\Gamma, R+S] = -[\Gamma, L] + [\Gamma, A]$.

5) (i) Montrer que $X_T \cdot R = r[\beta, S]$.

(ii) Montrer que $X_T \cdot S - (ad - s^2)[\beta, x \otimes y - y \otimes x]$.

6) En déduire que

$$X_{H_\beta} \cdot L = r[\beta, S] - (ad - s^2)[\beta, x \otimes y - y \otimes x] + \Delta[\Gamma, L] - \Delta[\Gamma, A],$$

puis écrire une matrice B telle que $X_{H_\beta} \cdot L = [B, L]$.
On rappelle que la trace $\mathrm{Tr}(M)$ d'une matrice M est la somme de ses éléments diagonaux.

7) Déduire de $\dfrac{dL}{dt} = [B, L]$ le fait que les fonctions $(x, y) \longmapsto \mathrm{Tr}\left(L^k(x, y)\right)$ sont constantes le long des solutions du système différentiel (de Hamilton) associé à H_β (quel que soit β fixé arbitrairement).

8) On note $H^{(k)}$ la fonction H_β correspondant au choix de β :

$$\beta_i = \delta_{i,k} \text{ où } k \text{ est fixé et } \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Montrer que $\{H^{(k)}, H^{(\ell)}\} = 0$ pour $k, \ell = 1, \ldots, m$.

9) Retrouver le système hamiltonien de la question I.4) en spécifiant des valeurs de a, b, c, d et en prenant $H = H_\alpha$.
Que peut-on en déduire pour le système de C. Neumann ?

IV

On suppose maintenant que $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$.
On pose $a = 0, b = 1, c = -1, d = -1$.

1) Quel est l'ensemble $\mathcal{E}_0$ des points $x \in \mathbf{R}^m$ tels que $\langle A^{-1}x, x\rangle - 1 = 0$?

2) Soit u un nombre réel. Montrer que $\Phi_z(x + uy, y) = \Phi_z(x, y)$.

3) On suppose maintenant que $z \in \mathbf{R}$, $z \neq \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Décrire les ensembles $\mathcal{E}_z$ définis par $Q_z(x, x) + 1 = 0$.

4) Étant donné un point $x \in \mathbf{R}^m$, montrez que les droites affines $x + uy$ qui sont tangentes à $\mathcal{E}_z$ sont telles que $\Phi_z(x, y) = 0$.

5) On considère le système différentiel (de Hamilton) défini par

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}. \tag{3}$$

Soit $\big(x(t), y(t)\big)$ la solution avec donnée initiale $\big(x_0, y_0\big)$.

(i) Montrer que si $\Phi_0\big(x_0, y_0\big) = 0$, alors $\Phi_0\big(x(t), y(t)\big) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

On peut donc restreindre le système (3) à l'ensemble $\Phi_0(x, y) = 0$.
Il existe étant donné $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathcal{E}_0$, solution du système différentiel (3), un seul point de contact $\xi(t) = x(t) + u(t)y(t)$ de la droite affine $x(t) + uy(t)$ passant par $x(t)$ de direction $y(t)$ tangente à $\mathcal{E}_0$.

(ii) Montrer que $\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{du}{dt} y$.

(iii) Montrer que, en introduisant un changement de temps $t \mapsto u = u(t)$, on obtient les équations (flot géodésique sur $\mathcal{E}_0$) :

$$\frac{d^2\xi}{du^2} = -\frac{2Q_0(y, y)}{du/dt} A^{-1}\xi.$$

(iv) Que peut-on dire de la direction de l'accélération $\dfrac{d^2\xi}{du^2}$?

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Définitions, notations et rappels

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. L'abréviation de variable aléatoire réelle sera v.a.r.

1. Si X est une v.a.r. intégrable ou positive on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance mathématique, $\mathbb{E}(X) = \int X dP$.

2. Pour tout $p \geq 1$, on désigne par L^p l'espace des v.a.r. X telles que $|X|^p$ soit intégrable.

3. Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée, on note $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. On note $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ existent et sont nulles et on le munit de la norme $\|\,.\,\|$.

4. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de Radon réelles de masse totale finie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que l'application qui à tout élément μ dans $\mathcal{M}$ fait correspondre la forme linéaire $f \to \int f d\mu$ identifie $\mathcal{M}$ à l'espace des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R})$.
Si μ est une mesure positive et f une fonction intégrable pour la mesure μ, on note $f\mu$ la mesure de Radon de densité f par rapport à μ.

5. $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. Un élément générique de $\mathcal{P}$ est appelé loi. La fonction de répartition F (f.r. en abrégé) de la loi μ ou d'une v.a.r. X de loi μ est définie par $F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$. On rappelle que F est continue à droite et on note $F(x-0)$ la limite à gauche de F au point x. Une loi μ est dite sans atome si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas sa fonction de répartition est continue.

6. On dit qu'une suite $(\mu_n)_{n>0}$ de lois converge faiblement vers une loi μ de $\mathcal{P}$ si pour toute f dans $C_0(\mathbb{R})$, $\mu_n(f)$ converge vers $\mu(f)$. On rappelle que, si μ est une loi sans atome, la convergence faible de $(\mu_n)_{n>0}$ vers μ est équivalente à la convergence uniforme des fonctions de répartition des lois μ_n vers la fonction de répartition de μ.

7. Un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$ est dit σ-fini si E s'exprime comme réunion au plus dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie. On rappelle l'énoncé du théorème de Fubini pour une fonction positive.
Soit $(E_i, \mathcal{E}_i, m_i)_{i=1,2}$ deux espaces mesurés σ-finis et f une application mesurable et positive, définie sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$. Alors les applications

$$f_1 : x_1 \longrightarrow \int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \quad \text{et} \quad f_2 : x_2 \longrightarrow \int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1)$$

sont mesurables, et $\displaystyle\int_{E_1 \times E_2} f d(m_1 \otimes m_2) = \int_{E_1} f_1 dm_1 = \int_{E_2} f_2 dm_2$.

8. Si μ et ν sont des éléments de $\mathcal{P}$, on note $\mu * \nu$ leur produit de convolution, qui est l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que, pour toute fonction f mesurable et positive

$$\int f(x) d(\mu * \nu)(x) = \iint f(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

On rappelle que le produit de convolution dans $\mathcal{P}$ est une loi interne, commutative et associative.

Si μ est un élément de $\mathcal{M}$ et g une fonction mesurable bornée, on note $\mu * g$ le produit de convolution de μ avec g, qui est la fonction mesurable et bornée définie par

$$\mu * g(x) = \int g(x-y)d\mu(y).$$

9. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et g une fonction mesurable bornée, on définit le produit de convolution $f * g$ par

$$f * g(x) = (f\lambda) * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

Préliminaires

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet de la régularisation par un noyau gaussien sur la distance uniforme entre les fonctions de répartition. Pour $\varepsilon > 0$, on définit donc la fonction ϕ_ε par

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\Big).$$

On rappelle que la fonction ϕ_ε est la densité de la loi gaussienne d'espérance nulle et de variance ε^2. Soit μ et ν deux lois, de fonctions de répartition respectives F et G. On pose $F_\varepsilon = \phi_\varepsilon * F$ et $G_\varepsilon = \phi_\varepsilon * G$.

1.

a. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|F - G\| = \sup_{x\in[-M,M]} |F(x) - G(x)|.$$

b. Soit Γ l'ensemble des points (x, y) dans $[-M, M]\times\mathbb{R}$ tels que $y = F(x)-G(x)$. Montrer que l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de l'ensemble Γ est compacte et que

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{(x,y) \in]-M, M] \times \mathbb{R} \text{ tels que } y = F(x-0) - G(x-0)\}.$$

c. En déduire qu'il existe x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\|F - G\| = |F(x_0) - G(x_0)| \text{ ou } \|F - G\| = |F(x_0 - 0) - G(x_0 - 0)|.$$

2. On suppose que la loi ν a une densité bornée par d.

a. Montrer que, si $\|F - G\| = 2\delta d$, il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) - G(x_0) = 2\delta d$ ou $G(x_0) - F(x_0 - 0) = 2\delta d$.

b. Montrer que si $F(x_0) = G(x_0) + 2\delta d$, alors, pour tout $x \geq x_0$,

$$2\delta d + F(x) - G(x) \geq d(4\delta + x_0 - x).$$

c. En déduire que si $F(x_0) = G(x_0) + 2\delta d$, alors

$$2\delta d + F_\varepsilon(x_0 + \delta) - G_\varepsilon(x_0 + \delta) \geq 3\delta d \int_{-\delta}^{\delta} \phi_\varepsilon(v)dv.$$

d. Étudier l'autre cas et montrer que, si ν a une densité bornée par d, alors

$$\|F-G\| = 2\delta d \implies \|F_\epsilon - G_\epsilon\| \geq 2\delta d\Big(3\int_0^\delta \phi_\epsilon(v)dv - 1\Big).$$

3. En admettant que $3\int_0^{3/2} \phi_1(v)dv - 1 > (2/7)$, en déduire que, si ν a une densité bornée par d, alors l'implication suivante est vraie:

$$(1) \qquad \|F_\epsilon - G_\epsilon\| \leq \frac{6}{7}\,\epsilon d \implies \|F-G\| \leq 3\,\epsilon d.$$

4. Soit $(\mu_n)_{n>0}$ une suite de lois et μ une loi ayant une densité bornée par une constante d. On note F_n la f.r. de μ_n et F la f.r. de μ. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \|\phi_\epsilon * F_n - \phi_\epsilon * F\| = 0$ pour tout $\epsilon > 0$, alors (μ_n) converge faiblement vers μ.

Première partie

Dans la suite du problème, $(X_i)_{i>0}$ est une suite de v.a.r. indépendantes et équidistribuées satisfaisant les conditions suivantes : X_1 est dans L^3, $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Pour chaque entier $n > 0$, on note S_n la somme $X_1 + \cdots + X_n$. Enfin la loi de $S_n/\sqrt{n}$ est notée μ_n et sa fonction de répartition F_n. La fonction de répartition de la loi gaussienne de densité ϕ_ϵ est notée Ψ_ϵ.

A

Soit, pour tout entier $r > 0$, $\mathcal{P}_r$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ constitué par les lois μ telles que $\int |x|^r d\mu(x) < \infty$. Pour toute application numérique h l-fois continûment dérivable, on note $h^{(l)}$ sa dérivée l-ième. Par convention on pose $h^{(l)} = h$ pour $l = 0$.

On dit qu'une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne si, pour tout couple (x, y) de réels,

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|.$$

On note $\mathcal{F}_r$ l'ensemble des applications h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(r-1)$-fois continûment dérivables dont la dérivée $(r-1)$-ième est 1-lipschitzienne et qui sont telles que $h^{(i)}(0) = 0$ pour tout entier i dans $[0, r[$.

5. Montrer que, pour tout entier $r > 0$, toute fonction h dans $\mathcal{F}_r$ et tout x dans $\mathbb{R}$,

$$|h(x)| \leq \frac{|x|^r}{r!}$$

En déduire que, pour toute loi μ dans $\mathcal{P}_r$, h est intégrable sous la loi μ.

6. On rappelle qu'un écart d sur $\mathcal{P}_r$ est une application symétrique de $\mathcal{P}_r \times \mathcal{P}_r$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant l'inégalité triangulaire et s'annulant sur la diagonale. Montrer que

$$d_r(\mu,\nu) = \sup_{f\in\mathcal{F}_r} \int f d(\mu - \nu)$$

est un écart sur $\mathcal{P}_r$.

7. Soit δ_0 la masse de Dirac en 0. Donner la valeur exacte de $d_r(\mu, \delta_0)$. Calculer explicitement $d_r(\phi_\epsilon\lambda, \delta_0)$ pour tous les entiers $r > 0$.

8. Soient π_1 et π_2 deux lois de $\mathcal{P}_r$ avec $\int x^i d(\pi_1 - \pi_2) = 0$ pour tout entier i dans $[1, r[$.

a. Montrer que

$$d_r(\pi_1, \pi_2) = \sup_{h \in \mathcal{G}_r} \int h d(\pi_1 - \pi_2),$$

où $\mathcal{G}_r$ est la classe des fonctions $(r-1)$ fois continûment dérivables de dérivée $(r-1)$-ième 1-lipschitzienne.

b. En déduire que $d_r(\mu * \pi_1, \mu * \pi_2) \leq d_r(\pi_1, \pi_2)$ pour tout élément μ de $\mathcal{P}_r$.

9. Soient μ une loi de f.r. F et ν une seconde loi. Montrer que la f.r. de $\mu * \nu$ est égale à $\nu * F$. En déduire que $\phi_\varepsilon * F = \mu * \Psi_\varepsilon$.

10. Déduire des questions précédentes que

$$\|\phi_\varepsilon * F_n - \phi_\varepsilon * \Psi_1\| \leq \|\phi_\varepsilon^{(1)}\| \; d_2(\mu_n, \phi_1 \lambda).$$

Montrer ensuite que $\|\phi_\varepsilon^{(1)}\| = (2\pi e)^{-1/2} \varepsilon^{-2}$.

11. Montrer que

$$\|\Psi_1 - F_n\| \leq \left(\sqrt{2}\, d_2(\mu_n, \phi_1 \lambda)\right)^{1/3}. \tag{2}$$

B

On se propose de majorer l'écart de μ_n à sa limite. Pour tout entier $k > 0$, on note ν_k la loi de $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ et on pose $\nu_0 = \delta_0$, où δ_0 désigne la masse de Dirac en 0.

12. Montrer que

$$n\, d_2(\mu_n, \phi_1 \lambda) \leq d_2(\nu_n\,,\, \nu_{n-1} * \phi_1 \lambda) + \sum_{l=1}^{n-1} d_2(\nu_{n-l} * \phi_{\sqrt{l}} \lambda\,,\, \nu_{n-l-1} * \phi_{\sqrt{l+1}} \lambda).$$

13. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$n\, d_2(\mu_n, \phi_1 . \lambda) \leq d_2(\nu_1, \phi_1 \lambda) + \sum_{l=1}^{n-1} d_2(\phi_{\sqrt{l}} \lambda * \nu_1\,,\, \phi_{\sqrt{l}} \lambda * \phi_1 \lambda).$$

14. Soient μ et ν deux éléments de $\mathcal{P}_3$ tels que $\int x^i d(\mu - \nu) = 0$ pour $i = 1, 2$.

a. Montrer que, pour tout réel $\eta > 0$,

$$d_2(\phi_\eta \lambda * \mu, \phi_\eta \lambda * \nu) \leq \frac{2}{\eta \sqrt{2\pi}}\, d_3(\mu, \nu).$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$n\, d_2(\mu_n, \phi_1 \lambda) \leq d_2(\nu_1, \phi_1 \lambda) + d_3(\nu_1, \phi_1 \lambda) \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi l}}.$$

15. Soit Y_1 v.a.r. gaussienne de loi $\phi_1 \lambda$. Montrer que

$$\sqrt{2\pi}\; \mathbb{E}(|Y_1|^3) \leq 4\, \mathbb{E}(|X_1|^3).$$

En déduire que

$$d_3(\nu_1, \phi_1 \lambda) \leq \frac{4 + \sqrt{2\pi}}{6\sqrt{2\pi}}\; \mathbb{E}(|X_1|^3).$$

16. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_2(\mu_n, \phi_1\lambda) \leq n^{-1/2}\mathbb{E}(|X_1|^3). \tag{3}$$

En déduire une majoration de $\|\Psi_1 - F_n\|$. Conclure.

Seconde partie

Le propos de cette partie est l'étude des espaces $(\mathcal{P}_r, d_r)$ pour $r = 1, 2$. Pour toute fonction de répartition F, on définit son inverse généralisée F^{-1} sur $]0,1[$ par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

A

17. On se propose de montrer que d_r est une distance. Soient donc μ et ν deux lois dans $\mathcal{P}_r$ telles que $\int h d(\mu - \nu) = 0$ pour tout h dans $\mathcal{F}_r$.

a. Montrer qu'il existe une suite finie $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$ de coefficients réels telle que, pour toute fonction h r-fois continûment dérivable et de dérivée r-ième bornée,

$$\int h d(\mu - \nu) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i h^{(i)}(0).$$

b. Montrer que $a_i = 0$ pour tout $i > 0$.

c. Conclure, en admettant que l'ensemble des fonctions r-fois continûment dérivables de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\,.\,\|$.

18. Soient μ et ν deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_1$, de fonctions de répartition respectives F et G.

a. Montrer que, si (X, Y) un couple de v.a.r. tel que X suive la loi μ et Y la loi ν, alors

$$d_1(\mu, \nu) \leq \mathbb{E}(|X - Y|).$$

b. En déduire que

$$d_1(\mu, \nu) \leq \int_0^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|\, du.$$

19. On considère les lois μ et ν de la question **18**. Montrer qu'il existe une fonction h dans $\mathcal{F}_1$ telle que

$$\int h d(\mu - \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)|\, dx.$$

En déduire une autre expression de d_1.

20. Montrer que $(\mathcal{P}_1, d_1)$ est un espace métrique complet.

B

On se propose maintenant d'étudier $(\mathcal{P}_2, d_2)$.

21. Soient μ et ν deux éléments de $\mathcal{P}_2$, et F et G leurs fonctions de répartition respectives.

a. Montrer qu'il existe un élément h de $\mathcal{F}_2$ tel que, pour tout u dans $]0,1[$,

$$h(F^{-1}(u)) - h(G^{-1}(u)) \geq \frac{1}{8}\left(F^{-1}(u) - G^{-1}(u)\right)^2.$$

b. En déduire que

$$\int_0^1 \left(F^{-1}(u) - G^{-1}(u)\right)^2 du \leq 8\, d_2(\mu,\nu). \tag{4}$$

22. Montrer que $(\mathcal{P}_2, d_2)$ est un espace métrique complet.

23. Pour (x,y) couple de réels, on note $\mathbb{1}_{x>y}$ la fonction valant 1 si $x > y$ et 0 sinon. Soit $\mathcal{K}$ une partie compacte de $(\mathcal{P}_2, d_2)$. Montrer que

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{K}} \int_{\mathbf{R}} x^2 \mathbb{1}_{|x|>A} d\mu(x) = 0.$$

En déduire que, pour les sommes S_n définies dans la première partie,

$$\lim_{B\to+\infty} \sup_{n>0} n^{-1}\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{S_n^2>nB}) = 0.$$

24. Pour tout réel $A > 0$, on note $\mathcal{K}_A$ l'ensemble des lois μ telles que $\mu([-A,A]) = 1$.

a. Montrer que $\mathcal{K}_A$ est une partie compacte de $(\mathcal{P}_2, d_2)$.

b. En déduire un critère de compacité pour les parties fermées de $(\mathcal{P}_2, d_2)$.

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Les *réseaux de Petri* ont été introduits dans les années 60, comme modèles de la communication entre processus parallèles. La décidabilité du *problème de l'accessibilité* pour ces réseaux a été démontrée il y a une quinzaine d'années. On se contentera ici d'étudier certains cas particuliers qui jouent un rôle essentiel dans la preuve de décidabilité. De plus, on montrera qu'un problème plus général, à savoir l'*inclusion des ensembles d'accessibilité*, est indécidable.

Notations et conventions

On note $\mathbf{N}$ (respectivement $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$) l'ensemble des entiers naturels (respectivement des entiers relatifs, des nombres rationnels). Si X est un ensemble et $p \in \mathbf{N}$, on note X^p l'ensemble des p-uplets $(a_1,\ldots,a_p)$ où $a_1,\ldots,a_p \in X$. On munit $\mathbf{N}^p$ de l'ordre produit : $(a_1,\ldots,a_p) \leq (b_1,\ldots,b_p)$ si $a_i \leq b_i$ pour $i = 1,\ldots,p$. On note $0_p = (0,\ldots,0)$ le vecteur nul de $\mathbf{Z}^p$, et $e_1,\ldots,e_p$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{Z}^p$. Enfin, si U et V sont des parties de $\mathbf{Z}^p$, on pose $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$.

Il n'est pas nécessaire de présenter les algorithmes comme des programmes. On se contentera de les décrire informellement.

I. Préliminaires

On cherche un algorithme pour déterminer si le système linéaire

$$n_1u_1 + \cdots + n_qu_q = v \tag{1}$$

admet une solution $(n_1,\ldots,n_q)$ dans $\mathbf{N}^q$, étant donnés des vecteurs $u_1,\ldots,u_q$, et v de $\mathbf{Z}^p$.

1. Pour chacun des systèmes suivants, existe-t-il une solution dans $\mathbb{N}^2$, dans $\mathbb{Q}^2$?

$$\begin{aligned} n_1(1,-1,1)+n_2(-2,4,1) &= (1,1,4), \\ n_1(1,-1,1)+n_2(-2,4,1) &= (1,1,2), \\ n_1(-2,1,-1)+n_2(4,-2,4) &= (-4,2,-1). \end{aligned}$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a,b,c,a',b',c' pour que les vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') soient linéairement dépendants. (Cette condition doit s'exprimer sous la forme d'un énoncé sans quantificateur.)

3. Soit M une matrice rectangulaire à p lignes et q colonnes, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. A quelle condition les q colonnes de M sont-elles linéairement dépendantes?

4. Dans le cas où les vecteurs $u_1,\dots,u_q$ sont linéairement indépendants, donner un algorithme pour décider si le système (1) admet une solution dans $\mathbb{N}^q$? (On pourra commencer par le cas où $p=q$.)

Dans les trois questions suivantes, on suppose que les vecteurs $u_1,\dots,u_q$ sont linéairement dépendants. En particulier, $q \geq 1$.

5. Donner un algorithme pour calculer explicitement des entiers relatifs $m_1,\dots,m_q$ non tous nuls tels que

$$m_1u_1+\cdots+m_qu_q=0. \tag{2}$$

(On pourra remarquer que, dans le cas où les vecteurs $u_1,\dots,u_{q-1}$ sont linéairement indépendants, le système (2) admet une unique solution dans $\mathbb{Q}^q$ telle que $m_q=1$.)

Quitte à changer les signes, on peut supposer que $m_i>0$ pour au moins un i.

6. Montrer que si le système (1) admet une solution dans $\mathbb{N}^q$, alors il en existe une telle que $n_i<m_i$ pour au moins un i.

7. A partir des vecteurs $u_1,\dots,u_q$ et des entiers $m_1,\dots,m_q$, construire un nombre fini de systèmes à $q-1$ inconnues tels que le système (1) admet une solution dans $\mathbb{N}^q$ si et seulement si l'un au moins de ces systèmes admet une solution dans $\mathbb{N}^{q-1}$.

II. Trois notions d'accessibilité

On cherche à résoudre le problème suivant: étant donnés deux points x et y de $\mathbb{N}^p$, peut-on aller de x à y par une suite de déplacements d'un certain type? Le type des déplacements autorisés sera une partie finie D de $\mathbb{Z}^p$. Pour un tel D, on introduit trois notions d'accessibilité:

- y est *accessible* depuis x s'il existe une suite $u_1,\dots,u_n$ de vecteurs de D telle que $y=x+u_1+\cdots+u_n$, et tous les points intermédiaires $x+u_1+\cdots+u_i$ pour $i=1,\dots,n-1$ sont dans $\mathbb{N}^p$;
- y est *faiblement accessible* depuis x s'il existe un point $x' \geq x$ tel que y est accessible depuis x' ;
- y est *virtuellement accessible* depuis x s'il existe une suite $u_1,\dots,u_n$ de vecteurs de D telle que $y=x+u_1+\cdots+u_n$, sans condition sur les points intermédiaires.

Bien entendu, la suite de déplacements peut être vide : en particulier, un point est toujours accessible depuis lui-même. Le *problème de l'accessibilité* (respectivement *de l'accessibilité faible*, *de l'accessibilité virtuelle*) est le suivant : D, x, y étant donnés, y est-il accessible (respectivement faiblement accessible, virtuellement accessible) depuis x ?

1. Le problème de l'accessibilité virtuelle est-il décidable ?

On note $\mathcal{A}(x,D)$ (respectivement $\mathcal{A}_f(x,D)$, $\mathcal{A}_v(x,D)$) l'ensemble des points $y \in \mathbb{N}^p$ qui sont accessibles (respectivement faiblement accessibles, virtuellement accessibles) depuis x.

2. Calculer $\mathcal{A}(x,D)$, $\mathcal{A}_f(x,D)$ et $\mathcal{A}_v(x,D)$ pour $x = (1,0)$ et $D = \{(1,-1),(-2,2)\}$.

3. En général, quelles inclusions a-t-on, et n'a-t-on pas, entre les ensembles $\mathcal{A}(x,D)$, $\mathcal{A}_f(x,D)$, et $\mathcal{A}_v(x,D)$? (On donnera un contre-exemple pour chaque réponse négative.)

4. Même question quand on se limite à la dimension $p = 1$.

On va maintenant montrer que le problème de l'accessibilité faible et celui de l'accessibilité virtuelle se ramènent au problème de l'accessibilité. On se donne une partie finie D de $\mathbb{Z}^p$, et on note $\mathcal{A}(D)$ (respectivement $\mathcal{A}_f(D)$, $\mathcal{A}_v(D)$) l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$ tels que y est accessible (respectivement faiblement accessible, virtuellement accessible) depuis x.

5. Construire une partie finie D_f de $\mathbb{Z}^p$ telle que $\mathcal{A}_f(D) = \mathcal{A}(D_f)$. (Aucune justification n'est demandée.)

6. Construire une partie finie D_v de $\mathbb{Z}^{p+1}$ telle que

$$\mathcal{A}_v(D) = \{(x,y) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p \mid (\iota(x),\iota(y)) \in \mathcal{A}(D_v)\}$$

où $\iota(a_1,\ldots,a_p) = (a_1,\ldots,a_p,0)$. (Aucune justification n'est demandée.)

III. Problème de l'accessibilité faible

Un *idéal additif* de $\mathbb{N}^p$ est une partie X de $\mathbb{N}^p$ telle que $X + \mathbb{N}^p = X$. Autrement dit, si $x \in X$ et $x' \geq x$, alors $x' \in X$. Par exemple, si x est un point de $\mathbb{N}^p$, l'ensemble $\overline{x} = \{x' \in \mathbb{N}^p \mid x' \geq x\}$ est le plus petit idéal additif contenant x. Un tel idéal additif est dit *principal*.

1. Quels sont les idéaux additifs de $\mathbb{N}$?

Pour $i = 1,\ldots,p$ et $n \in \mathbb{N}$, on note H_n^i l'ensemble des points de $\mathbb{N}^p$ dont la i-ème coordonnée vaut n.

2. Si x est un point de $\mathbb{N}^p$, exprimer le complémentaire de $\overline{x}$ dans $\mathbb{N}^p$ sous la forme d'une union finie de H_n^i.

3. Montrer que si X est une partie de $\mathbb{N}^p$, l'ensemble $\underline{X}$ de ses points minimaux est fini.

4. Montrer que tout idéal additif de $\mathbb{N}^p$ est une union finie d'idéaux additifs principaux.

On se donne $x \in \mathbb{N}^p$ et une partie finie D de $\mathbb{Z}^p$. On suppose que D contient le vecteur nul 0_p. Sinon, on peut toujours le rajouter sans changer les différentes notions d'accessibilité. Si X est une partie de $\mathbb{N}^p$, on pose $\Phi(X) = (X + D) \cap \mathbb{N}^p$. Par définition, on a

$$\mathcal{A}_f(x,D) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \text{ où } X_n = \Phi^n(\overline{x}).$$

5. Montrer que la suite des X_n est stationnaire.

6. Expliciter les $\underline{X_n}$ dans le cas où $x = (1,1)$ et $D = \{(0,0),(1,-1),(-2,2)\}$.

7. Exprimer $\underline{X_{n+1}}$ directement en fonction de $\underline{X_n}$.

8. Comment décide-t-on si un point y est faiblement accessible depuis x?

IV. Chemins dans un graphe orienté

Si X est un ensemble, on note $\mathbf{Z}X$ le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par X, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires formelles $u = \sum_{\xi\in X} a_\xi[\xi]$, où les a_ξ sont des entiers relatifs presque tous nuls, et les $[\xi]$ sont des générateurs associés aux éléments de X. On note $\mathbf{N}X$ l'ensemble des u pour lesquels les a_ξ sont des entiers naturels, et dans ce cas, on pose $||u|| = \sum_{\xi\in X} a_\xi$.

Un *graphe orienté* G est défini par un ensemble S de *sommets*, un ensemble A d'*arêtes*, et la donnée, pour chaque arête α, de deux sommets respectivement appelés *source* et *but* de α. On écrit $\sigma \xrightarrow{\alpha} \tau$ si α est une arête de source σ et de but τ. On permet que la source et le but d'une même arête soient identiques (*arête fermée*). On permet aussi que deux arêtes distinctes aient même source et même but.

Un *sous-graphe* de G est défini par une partie S' de S, et une partie A' de A telle que, si $\sigma \xrightarrow{\alpha} \tau$ est dans A', alors σ et τ sont dans S'. On dit que G est *connexe* s'il est non vide, et s'il ne peut être décomposé en deux sous-graphes non vides disjoints.

Un *chemin* $\sigma \xrightarrow{\gamma} \tau$ dans G est une suite $\sigma = \sigma_0 \xrightarrow{\alpha_1} \sigma_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} \sigma_n = \tau$. On pose alors $[\gamma] = [\alpha_1] + \cdots + [\alpha_n] \in \mathbf{N}A$. En particulier, on a un *chemin vide* $\sigma \xrightarrow{\varepsilon_\sigma} \sigma$ pour chaque sommet σ de G, et $[\varepsilon_\sigma] = 0$.

1. Montrer que l'application $\gamma \mapsto [\gamma]$ n'est pas nécessairement injective, même si on la restreint à l'ensemble des chemins non vides.

On définit une application $\mathbf{Z}$-linéaire $\partial : \mathbf{Z}A \to \mathbf{Z}S$ en posant $\partial[\alpha] = [\tau] - [\sigma]$ pour tout $\sigma \xrightarrow{\alpha} \tau$. Il est clair que $\partial[\gamma] = [\tau] - [\sigma]$ pour tout chemin $\sigma \xrightarrow{\gamma} \tau$. On se donne maintenant deux sommets σ et τ de G, non nécessairement distincts.

2. Montrer que, si $u \in \mathbf{N}A$ est tel que $\partial u = [\tau] - [\sigma]$, il n'existe pas nécessairement de chemin $\sigma \xrightarrow{\gamma} \tau$ tel que $u = [\gamma]$.

3. Montrer que, sous les hypothèses de la question précédente, il existe un chemin $\sigma \xrightarrow{\gamma} \tau$ et $v \in \mathbf{N}A$ tels que $u = [\gamma] + v$. (On pourra raisonner par récurrence sur $||u||$.)

Etant donné $u = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha[\alpha] \in \mathbf{N}A$, on définit le sous-graphe G_u de G dont les arêtes sont les α tels que $a_\alpha \neq 0$, et les sommets sont les sources et les buts de ces arêtes. Il est clair que, si $u = [\gamma]$ où γ est un chemin non vide, alors G_u est connexe.

4. Montrer que, si $u \in \mathbf{N}A$ est tel que σ est un sommet de G_u et $\partial u = 0$, alors il existe un chemin fermé non vide $\sigma \xrightarrow{\gamma} \sigma$ et $v \in \mathbf{N}A$ tels que $u = [\gamma] + v$.

5. Montrer que, si $u \in \mathbf{N}A$ est tel que G_u est connexe, σ est un sommet de G_u, et $\partial u = [\tau] - [\sigma]$, alors il existe un chemin $\sigma \xrightarrow{\gamma} \tau$ tel que $u = [\gamma]$.

V. Problèmes d'accessibilité pour un graphe

On suppose que G est un graphe orienté fini, c'est-à-dire que l'ensemble S des sommets et l'ensemble A des arêtes sont finis. On pourra donc identifier $\mathbf{N}S$ (respectivement $\mathbf{Z}S$, $\mathbf{N}A$, $\mathbf{Z}A$) avec $\mathbf{N}^s$ (respectivement $\mathbf{Z}^s$, $\mathbf{N}^q$, $\mathbf{Z}^q$) où s est le nombre de sommets et q le nombre d'arêtes.

1. Construire une partie finie D de $\mathbf{Z}S$ telle que $([\sigma],[\tau]) \in \mathcal{A}(D)$ si et seulement s'il existe un chemin $\sigma \xrightarrow{\gamma} \tau$. (Aucune justification n'est demandée.)

On se donne une application $\alpha \mapsto \Delta\alpha$, de A vers $\mathbf{Z}^p$, et on généralise les notions d'accessibilité de la partie II, en considérant cette fois des couples (σ, x) et (τ, y) dans $S \times \mathbf{N}^p$:

- (τ, y) est *accessible* depuis (σ, x) s'il existe un chemin

$$\sigma = \sigma_0 \xrightarrow{\alpha_1} \sigma_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} \sigma_n = \tau$$

  tel que $y = x + \Delta\alpha_1 + \cdots + \Delta\alpha_n$, et tous les points intermédiaires $x + \Delta\alpha_1 + \cdots + \Delta\alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ sont dans $\mathbf{N}^p$;

- (τ, y) est *faiblement accessible* depuis (σ, x) s'il existe un point $x' \geq x$ tel que (τ, y) est accessible depuis (σ, x') ;

- (τ, y) est *virtuellement accessible* depuis (σ, x) s'il existe un chemin

$$\sigma = \sigma_0 \xrightarrow{\alpha_1} \sigma_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} \sigma_n = \tau$$

  tel que $y = x + \Delta\alpha_1 + \cdots + \Delta\alpha_n$, sans condition sur les points intermédiaires.

Dans le cas où le graphe G n'a qu'un seul sommet, on retrouve les notions de la partie II en posant $D = \{\Delta\alpha \mid \alpha \in A\}$. Le *problème de l'accessibilité* (respectivement *de l'accessibilité faible*, *de l'accessibilité virtuelle*) pour G est le suivant : Δ, (σ, x), (τ, y) étant donnés, (τ, y) est-il accessible (respectivement faiblement accessible, virtuellement accessible) depuis (σ, x) ?

2. Montrer que, si G est sans arête fermée, le problème de l'accessibilité pour G en dimension p se ramène au problème de l'accessibilité (celui qui est défini dans la partie II) en dimension $s + p$.

3. Montrer que le problème de l'accessibilité pour G se ramène au problème de l'accessibilité pour un G' sans arête fermée.

4. Montrer que le problème de l'accessibilité faible pour G est décidable.

On note Δ l'application $\mathbf{Z}$-linéaire de $\mathbf{Z}A$ vers $\mathbf{Z}^p$ définie par $\Delta[\alpha] = \Delta\alpha$.

5. Exprimer l'accessibilité virtuelle pour G en termes de vecteurs de $\mathbf{N}A$ plutôt qu'en termes de chemins.

6. Montrer que le problème de l'accessibilité virtuelle pour G est décidable.

VI. Simulation du calcul d'un polynôme

On appelle *automate à p registres* un graphe orienté fini G, muni d'une application $\alpha \mapsto \Delta\alpha$ de l'ensemble des arêtes de G vers $\mathbb{Z}^p$, de deux sommets non nécessairement distincts σ (l'*état initial*) et τ (l'*état final*), et de deux suites $i_1, \ldots, i_k$ (les *registres d'entrée*) et $j_1, \ldots, j_\ell$ (les *registres de sortie*) dans $\{1, \ldots, p\}$. La suite $i_1, \ldots, i_k$ n'est pas nécessairement croissante, mais elle doit être sans répétition. Il en va de même pour la suite $j_1, \ldots, j_\ell$.

La figure 1 représente des automates à registres. Chaque arête α est étiquetée par $\Delta\alpha$, sauf quand $\Delta\alpha = 0_p$, auquel cas on ne le mentionne pas. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, et l'état final par une flèche sortante.

Pour un tel automate, on considère l'injection $\iota : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}^p$ qui à $(a_1, \ldots, a_k)$ associe $(b_1, \ldots, b_p)$ où $b_{i_1} = a_1, \ldots, b_{i_k} = a_k$, et $b_i = 0$ si i n'est pas un registre d'entrée, ainsi que la projection $\pi : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}^\ell$ qui à $(a_1, \ldots, a_p)$ associe $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\ell})$. On dit que l'automate *réalise* l'application $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}^\ell$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) pour tout $x \in \mathbf{N}^k$, il existe $y \in \mathbf{N}^p$ tel que (τ, y) est accessible depuis $(\sigma, \iota(x))$ et $\pi(y) = f(x)$;

ii) pour tout $x \in \mathbf{N}^k$ et pour tout $y \in \mathbf{N}^p$ tel que (τ, y) est accessible depuis $(\sigma, \iota(x))$, on a $\pi(y) \leq f(x)$.

Si un tel automate existe, on dit que l'application f est *réalisable*.

1. Quelles applications sont réalisées par les 5 automates de la figure 1 ? (Aucune justification n'est demandée.)

2. Montrer que toute application réalisable est croissante.

3. Construire un automate réalisant l'application $\delta_k : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}^{2k}$ qui à $(a_1, \ldots, a_k)$ associe $(a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k)$.

4. Etant donné un automate réalisant l'application $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}^\ell$, construire un automate réalisant l'application $f \times \mathbf{N}^m : \mathbf{N}^{k+m} \to \mathbf{N}^{\ell+m}$ qui à $(a_1, \ldots, a_{k+m})$ associe $(b_1, \ldots, b_\ell, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m})$ où $(b_1, \ldots, b_\ell) = f(a_1, \ldots, a_k)$.

5. Etant donnés deux automates réalisant les applications $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}^\ell$ et $g : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N}^m$, construire un automate réalisant l'application $g \circ f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}^m$.

6. Montrer que si les applications $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ sont réalisables, alors les applications $f + g$ et fg le sont aussi.

7. Montrer que pour tout polynôme P à k indéterminées, à coefficients dans $\mathbf{N}$, l'application $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto P(a_1, \ldots, a_k)$ est réalisable.

VII. Un problème indécidable

Pour toute application $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$, on pose

$$\Gamma(f) = \{(a_1, \ldots, a_k, b) \in \mathbf{N}^{k+1} \mid b \leq f(a_1, \ldots, a_k)\}.$$

On considère les problèmes suivants :

($\mathcal{P}1$) Etant donné un polynôme P à k indéterminées, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, existe-t-il $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{N}^k$ tel que $P(a_1, \ldots, a_k) = 0$?

($\mathcal{P}2$) Etant donnés deux polynômes P et Q à k indéterminées, à coefficients dans $\mathbf{N}$, existe-t-il $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{N}^k$ tel que $P(a_1, \ldots, a_k) \leq Q(a_1, \ldots, a_k)$?

($\mathcal{P}3$) Etant donnés deux polynômes P et Q à k indéterminées, à coefficients dans $\mathbf{N}$, a-t-on $\Gamma(Q) \subset \Gamma(P)$?

($\mathcal{P}4$) Etant donnés $x, y \in \mathbf{N}^p$ et des parties finies D, E de $\mathbb{Z}^p$, a-t-on $\mathcal{A}(y, E) \subset \mathcal{A}(x, D)$?

On admet que ($\mathcal{P}1$) est indécidable (théorème de Matijasevič).

1. Montrer que ($\mathcal{P}2$) et ($\mathcal{P}3$) sont indécidables.

Si $k \leq p$, on note $\pi_p^k : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}^k$ la projection qui à $(a_1, \ldots, a_p)$ associe $(a_1, \ldots, a_k)$. On dit qu'un automate à p registres, sans registre d'entrée, et dont les registres de sortie sont $1, \ldots, k$, *réalise* la partie X de $\mathbf{N}^k$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

iii) pour tout $x \in X$, il existe $y \in \mathbf{N}^p$ tel que (τ, y) est accessible depuis $(\sigma, 0_p)$ et $\pi_p^k(y) = x$;

iv) pour tout sommet σ' et pour tout $y \in \mathbf{N}^p$ tel que (σ', y) est accessible depuis $(\sigma, 0_p)$, on a $\pi_p^k(y) \in X$.

Si un tel automate existe, on dit que la partie X est *réalisable*.

2. Etant donné un automate à p registres réalisant l'application $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$, construire un automate à $k + 1 + p$ registres réalisant la partie $\Gamma(f)$.

3. Montrer que pour toute partie réalisable X de $\mathbf{N}^k$, il existe $p \geq k$, $x \in \mathbf{N}^p$ et une partie finie D de $\mathbb{Z}^p$ tels que $\pi_p^k(\mathcal{A}(x, D)) = X$.

On se donne maintenant $x \in \mathbf{N}^p$ et une partie finie D de $\mathbb{Z}^p$ tels que $\pi_p^k(\mathcal{A}(x, D)) = X$. Si $u = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$ et $a_{p+1}, \ldots, a_{p+4} \in \mathbb{Z}$, on note $(u, a_{p+1}, \ldots, a_{p+4})$ le vecteur $(a_1, \ldots, a_{p+4}) \in \mathbb{Z}^{p+4}$. On pose $x^\sharp = (x, 1, 0, 0, 0)$ et

$$\begin{aligned} D^\sharp = {} & \{(u, -1, 1, 0, 0) \mid u \in D\} \cup \{(\pm e_i, 0, 0, -1, 1) \mid k+1 \leq i \leq p\} \cup \\ & \{(0_p, 1, -1, 0, 0), (0_p, -1, 0, 1, 0), (0_p, 0, 0, 1, -1), (0_p, 0, 0, -1, 0)\}. \end{aligned}$$

4. Calculer $\mathcal{A}(x^\sharp, D^\sharp) \cap \{(y, 0, 0, 0, 0) \mid y \in \mathbf{N}^p\}$.

5. Montrer que ($\mathcal{P}4$) est indécidable.

En fait, on n'a pas vraiment besoin du théorème de Matijasevič. On peut utiliser un résultat plus ancien dû à Davis, Putnam et Robinson. Il faut alors étendre la classe des polynômes en ajoutant l'exponentiation.

6. Montrer que l'application $a \mapsto 2^a$ est réalisable.

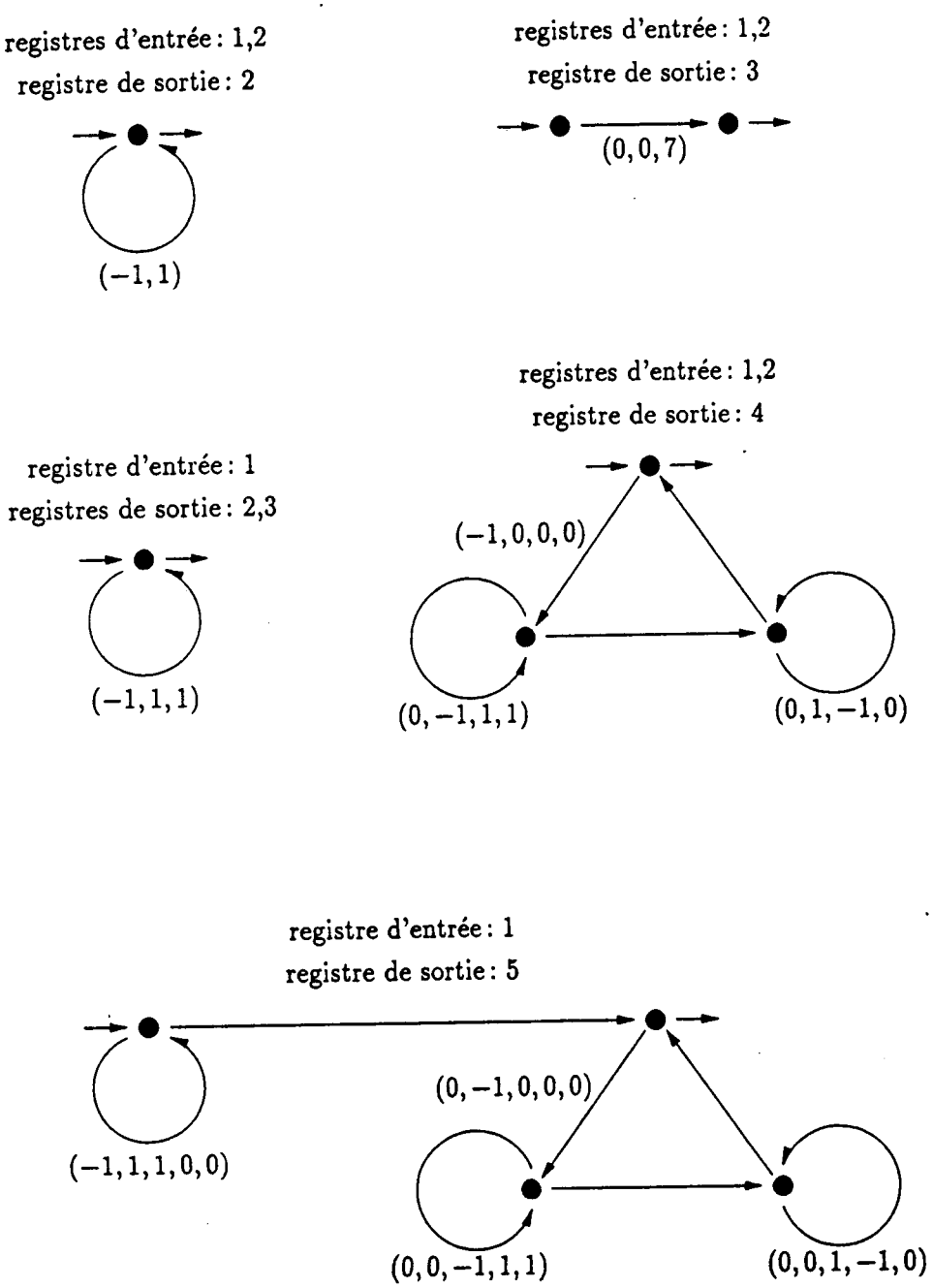
registres d'entrée : 1,2
registre de sortie : 2
(−1, 1)
registres d'entrée : 1,2
registre de sortie : 3
(0, 0, 7)
registre d'entrée : 1
registres de sortie : 2,3
(−1, 1, 1)
registres d'entrée : 1,2
registre de sortie : 4
(−1, 0, 0, 0)
(0, −1, 1, 1)
(0, 1, −1, 0)
registre d'entrée : 1
registre de sortie : 5
(−1, 1, 1, 0, 0)
(0, −1, 0, 0, 0)
(0, 0, −1, 1, 1)
(0, 0, 1, −1, 0)

Figure 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail